

ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЙ СПЕЦПРАКТИКУМ

Работа №16

РАСЧЁТ ФАКТОРОВ ПРОЦЕССА МАССОПЕРЕНОСА ПРИ ИСПАРЕНИИ ВОДЫ С ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ВОЗДУШНЫЙ ПОТОК

1. Цель работы

1.1. Закрепление лекционного материала по гидродинамике и конвективному массопереносу при внешнем обтекании тел и фазовых переходах, а также гидродинамической теории массопереноса и факторов, характеризующих интенсивность молярного и молекулярного массопереноса.

1.2. Проведение расчёта полей скорости и концентрации, а также итоговых факторов процесса массопереноса при испарении жидкости с плоской поверхности в воздушный поток.

1.3. Выявление физической сущности результатов расчета.

2. Краткая теория

2.1. “Гидродинамическая теория” массопереноса при внешнем обтекании тел

“Гидродинамическая теория” основана на аналогии между переносом импульса и вещества, справедливой при выполнении следующих трех требований:

- 1) одинаковость физической природы явлений переноса импульса и вещества;
- 2) идентичность дифференциальных уравнений, описывающих эти явления, при представлении этих уравнений в безразмерном виде;
- 3) протекание обоих явлений в подобных системах, т.е. в геометрически подобных границах, с подобными условиями однозначности (граничными и начальными условиями) и при условии равенства определяющих критериев в сходственных точках.

Физическая природа данных двух явлений действительно одинакова. Перенос, как импульса, так и вещества, осуществляется от поверхности в поток за счет теплового хаотического движения молекул при ламинарном течении и за счёт добавляющихся к нему поперечных пульсаций при турбулентном течении.

При внешнем стационарном обтекании плоской поверхности бесконечной ширины свободным потоком наблюдается чисто инерционное движение среды над поверхностью с постоянным статическим давлением, т.е. без градиента давления вдоль поверхности. При этом дифференциальные уравнения образующихся на поверхности плоских гидродинамического и диффузионного пограничных слоёв записываются следующим образом [1]:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{1}{Re_D} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}. \quad (1)$$

Здесь $x = \frac{x}{L}$, $y = \frac{y}{L}$, $u = \frac{u}{V_0}$, $v = \frac{v}{V_0}$, $C = \frac{c}{c_w}$, $C_0 = \frac{c_0}{c_w}$,

$$Cl = \frac{C}{C_0}, \quad Re = \frac{V_0 L}{\nu}, \quad Re_D = \frac{V_0 L}{D} = \frac{V_0 L}{\nu} \frac{\nu}{D} = Re Sc, \quad Sc = \frac{\nu}{D},$$

u, v – компоненты скорости соответственно вдоль осей x (вдоль потока) и y (поперёк потока); L – характерный размер – длина плоскости обтекания; V_0 – скорость набегающего потока, направленная вдоль поверхности ($u = V_0$ за пределами пограничного слоя); c_0 – концентрация испаряющегося вещества в набегающем потоке; c_w – концентрация испаряющегося вещества на поверхности испарения (при $y = 0$), зависящая от давления среды p и температуры поверхности T_w ; ν – кинематическая вязкость среды потока; D – коэффициент

диффузии паров испаряющегося вещества в поток; δ - толщина пограничного слоя; Re – безразмерный критерий Рейнольдса; Sc – безразмерный критерий Шмидта.

При этом в уравнениях гидродинамического пограничного слоя δ - толщина этого слоя, а в уравнениях массопереноса – это толщина диффузионного пограничного слоя. Их соотношение зависит от величины критерия Шмидта Sc :

$$\delta \approx \delta' \sqrt{Sc}^{\frac{1}{3}}, \text{ так что при } Sc = 1 \quad \delta \approx \delta'.$$

Граничные и начальные условия уравнений (1):

$$\begin{aligned} y=0: & \quad u=0; \quad v=0; \quad c=0; \\ y=\delta: & \quad u=1; \quad v=1; \quad c=1; \\ x=0: & \quad u=1; \quad v=1; \quad c=1. \end{aligned} \quad (2)$$

Как видно из сравнения уравнений (1) и их условий однозначности (2), они оказываются полностью идентичными для u и c , если $Re \approx Re_{\delta}$, т.е. $Sc = 1$ (одновременно $\delta \approx \delta'$). Три условия подобия систем обеспечиваются тем, что оба явления протекают в одних и тех же границах с идентичными условиями однозначности (2), а равенство критериев в сходственных точках (т.е. в точках с одинаковыми безразмерными координатами) обеспечено сделанным выше выбором характерных параметров.

Следовательно, при $Sc = 1$ имеет место точная аналогия (аналогия Рейнольдса) между гидродинамической и массообменной задачами при обтекании для скоростей и относительных концентраций и, как следствие этого, пропорциональность факторов, описывающих результаты протекания процессов.

При $Sc \neq 1$, согласно гидродинамической теории Прандтля и Кармана [2], имеет место приближенная аналогия, дающая хорошие результаты с погрешностью 1-3 %, а при значениях Sc , близких к единице, ещё точнее. При этом сохраняется подобие полей скоростей и относительных концентраций, а основное соотношение между факторами массопереноса - прежде всего критерием Шервуда $Sh \approx \frac{\beta x}{D}$ (где β в данной задаче – коэффициент испарения в m/c) и коэффициентом гидродинамического сопротивления C_f имеет следующий вид [1]:

$$Sh \approx \frac{C_f}{2} \sqrt{Re} \sqrt{Sc}^{\frac{1}{3}}. \quad (3)$$

2.2. Расчёт гидродинамического пограничного слоя при обтекании пластины (однослойная схема) [1]

Гидродинамический пограничный слой при обтекании пластины является ламинарным на расстоянии от начала обтекания ($x = 0$) до $x \approx x_{кр}$ (критического значения), т.е. при $0 \leq x \leq x_{кр}$, соответствующего критическому значению критерия Рейнольдса

$$Re_{кр} \approx \frac{V_{\infty} x_{кр}}{\nu} \approx 5 \cdot 10^5. \quad (4)$$

При $x \gg x_{кр}$ пограничный слой становится турбулентным. Для ламинарного пограничного слоя на основании анализа и решения уравнения (1) для гидродинамического слоя на пластине толщина слоя

$$\delta \approx \frac{4,92 \sqrt{x}}{\sqrt{Re_x}}, \quad (5)$$

профиль скорости

$$u \approx v \approx \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} \approx \frac{1}{2} \frac{y^3}{\delta^3} \quad (6)$$

Локальный коэффициент гидродинамического трения в сечении x :

$$C_{fx} \approx \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}} \quad (7)$$

Для турбулентного пограничного слоя

$$\delta_T \approx \frac{0,37x}{\sqrt[5]{Re_x}}$$

Однако эта формула получена при граничных условиях $x = 0$, а это не так, турбулентный слой начинается не с $x = 0$, а с $x = x_{кр}$, притом при $x = x_{кр}$ $\delta_T = 0$, а $\delta_T = \delta_L$. Поэтому в эту формулу надо вводить поправку, либо надо пользоваться значительно более сложным соотношением:

$$\delta_T \approx \frac{0,37x}{\sqrt[5]{Re}} \approx \delta_T; \quad \delta_T \approx \delta_T \text{ (при } x = x_{кр}) - \delta_L \text{ (при } x = x_{кр}), \quad (8)$$

где δ_T (при $x = x_{кр}$) определяется по формуле для δ_T без поправки δ_T .

Универсальный турбулентный профиль “одной седьмой”:

$$u \approx V \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} \quad (9)$$

Локальный коэффициент сопротивления в сечении x :

$$C_f \approx \frac{0,0592}{\sqrt[5]{Re_x}} \quad (10)$$

2.3. Расчет диффузионного пограничного слоя при обтекании плоской поверхности

Расчет с использованием гидродинамической теории проводится на основании теоретических результатов, изложенных выше в разделах 2.1 и 2.2.

Толщина диффузионного пограничного слоя:

$$\delta_D \approx \delta \sqrt[3]{Sc}; \quad \text{при } Sc \approx 1 \quad \delta_D \approx \delta \quad (11)$$

В ламинарном диффузионном пограничном слое (также при $x < x_{кр}$) и по аналогии с уравнением (1) для массообмена на пластине [2] профиль концентрации будет:

$$c \approx c_w \left(\frac{y}{\delta_D} \right)^3 \approx \frac{1}{2} \frac{y^3}{\delta_D^3} \quad (12)$$

В турбулентном диффузионном пограничном слое (при $x > x_{кр}$) по аналогии с профилем скорости (9) “одной седьмой” будет:

$$c \approx c_w \left(\frac{y}{\delta_D} \right)^{\frac{1}{7}} \quad (13)$$

т.е. аналогия соблюдается для скорости и концентрации $C \approx c \approx c_w$, причем со знаком “минус” [2], так как направления градиента скорости ∂u и градиента концентрации ∂c противоположны.

Во всех случаях выполнено соотношение (3), на основе которого локальное, т.е. в сечении x , значение коэффициента массообмена (в данном случае испарения) находится следующим образом:

$$\alpha = \frac{Sc \cdot D}{x} \cdot \frac{C_f}{2} \cdot Re \cdot Sc^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{D}{x} \cdot \frac{C_f}{2} \cdot \frac{V_{\infty}}{D^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{D}{x} \cdot \frac{C_f}{2} \cdot Sc^{\frac{2}{3}}, \quad (14)$$

$$\alpha = \frac{C_f}{2} \cdot V_{\infty} \cdot Sc^{\frac{1}{3}}.$$

Среднее значение коэффициента испарения α_L для всей пластины от $x = 0$ до $x = x_1$ в ламинарном слое:

$$\alpha_L = \frac{1}{x_1} \int_0^{x_1} \alpha dx, \quad (15)$$

куда следует подставить величину α , определяемую формулой (14) с учетом выражения для C_f и раскрыть все величины, выявив явную зависимость $\alpha(x)$. Среднее значение α_T для пластины в турбулентном слое от $x = x_{кр}$ до $x = x_1$ (того сечения, в котором подсчитывается локальное значение α):

$$\alpha_T = \frac{1}{x_1 - x_{кр}} \int_{x_{кр}}^{x_1} \alpha dx. \quad (16)$$

Среднее значение α для всей пластины от $x = 0$ до $x = x_1$, включающей и ламинарный, и турбулентный слой, следует определять как средневзвешенную величину, используя формулы (15) и (16):

$$\alpha = \frac{\alpha_L \cdot x_{кр} + \alpha_T \cdot (x_1 - x_{кр})}{x_1}. \quad (17)$$

Локальная величина потока испаряющейся жидкости с единицы поверхности в сечении x :

$$j = \alpha \cdot C, \quad (18)$$

$$C = c_w - c_{\perp,д}, \quad c_{\perp,д} = \frac{1}{\int_D^{\perp,д} 0} \int_D^{\perp,д} c_{\perp,д} dy, \quad (19)$$

куда следует подставить c , найденные по формулам (12) или (13) соответственно для ламинарного или турбулентного слоя.

Среднее значение удельного потока для $x = 0 \div x$:

$$\bar{j} = \alpha \cdot C. \quad (20)$$

Общее количество M (масса) испарившейся за 1 секунду жидкости со всей поверхности от $x = 0$ до $x = x_1$: $M = \int_0^{x_1} j \cdot F \cdot dx$. Здесь $F = x \cdot z$ - площадь поверхности испарения. Поскольку поверхность задаётся бесконечной ширины (по оси z), расчет M следует проводить для значения $z = 1$ м. Тогда для $x = x_1$ получим:

$$M_1 = \int_0^{x_1} j \cdot dx, \quad (\text{кг/с}). \quad (21)$$

Концентрацию паров испаряющейся жидкости на поверхности можно считать [3] равной плотности насыщенных паров этого вещества при давлении p и температуре T_w (равновесные условия испарения):

$$c_w = X_w \frac{p_w}{R T_w}, \quad (22)$$

где μ – молярная масса паров жидкости, p_w – парциальное давление паров жидкости при давлении $p_{атм}$ и температуре поверхности T_w , R – универсальная газовая постоянная.

Значение T_w при адиабатическом испарении рассчитывается с учетом теплоты испарения [3]. Однако в практических задачах при испарении воды с открытой поверхности в природе и технике необходимо учитывать ещё и радиационный нагрев воды солнцем или другим источником тепла, глубину воды, её теплопроводность с учетом солёности и т.п. Такой расчёт возможен, но сложен и не входит в непосредственные задачи данной работы, поэтому в расчёте задаются значения $T_w = const$ и $p = p_0 = const$, которым соответствует $p_w = const$ по табличным данным, а по нему $c_w = const$ по (22).

Величина c_0 должна задаваться в зависимости от фактических граничных условий практической задачи. Для простоты в данной работе она принята равной $c_0 = 0$. Однако необходимо проанализировать изменение результатов в зависимости от других значений (см. ниже п.5.12).

Следовательно, для сечения $x = 0$ $C = c_w = c_0 = c_w$, а для последующих сечений (для $x \neq 0$) $C = c_w = c_{\perp, D}$. Можно было бы без глубоких раздумий априори предположить, что величина средней по толщине диффузионного пограничного слоя концентрации $c_{\perp, D}$ вдоль длины поверхности непрерывно растёт. Однако, анализируя для ламинарного слоя зависимость от длины x величин δ (формула (5)), c_f (формула (7)) и соответственно δ_D (формула (11)), δ (формула (14)), j (формула (20)) и M (формула (21)), легко видеть, что толщина δ_D и, соответственно, объём диффузионного пограничного слоя вдоль длины x растут пропорционально корню квадратному от x : $\delta_D \sim \delta \sim \sqrt{x}$. Но так же, аналогично δ_D , увеличивается вдоль x и масса M испаряющегося вещества: $M \sim \sqrt{x}$. Следовательно, средняя концентрация в ламинарном пограничном слое $c_{\perp, D}$ остаётся постоянной вдоль x . К каждому сечению в пограничном слое “вдувается” из предыдущих сечений поток, содержащий пары жидкости с той же концентрацией $c_{\perp, D}$. В данном сечении к этим парам добавляется испарившееся вещество, но пропорционально ему увеличивается и объём слоя, так что в итоге остаётся $c_{\perp, D} = const$.

В турбулентном слое из аналогичного анализа следует, что $\delta_D \sim x^{4/5}$ и $M \sim x^{4/5}$, так что вдоль всей длины турбулентного слоя остаётся $c_{\perp, D} = const$, и при $c_w = const$ $C = c_w = c_{\perp, D} = const$.

Однако $c_{\perp, L}$ в ламинарном слое и $c_{\perp, T}$ в турбулентном различны (турбулентный слой значительно шире и хорошо перемешан пульсациями).

Поэтому $c_{\perp, L, T}$ и $C_{\perp, L, T}$ по всей длине пластины необходимо находить по $c_{\perp, L}$ и $c_{\perp, T}$ как средневзвешенное пропорционально средним секундным объёмам каждого их слоёв, т.е. потокам, определяющимся произведениями $u_L \delta_D$ и $u_T \delta_T$, где

$$\int_L \frac{1}{x_{кр}} \int_0^{x_{кр}} dx, \quad (23)$$

куда следует подставить \int_L , найденное по формуле (5);

$$\int_T \frac{1}{x \int_{x_{кр}}^x} dx, \quad (24)$$

куда следует подставить \int_T , найденное по формуле (8), но с учетом \int_L , следовательно,

$$c_{\int_L, \int_T} = \frac{c_{\int_L} \int_L u_L \int_L c_{\int_T} \int_T u_T \int_T}{\int_L u_L \int_L \int_T u_T \int_T} \cdot C_{L \int_T} c_w c_{\int_L, \int_T}. \quad (25)$$

Средняя по толщине гидродинамического слоя скорость потока

$$u_{\int} = \frac{1}{\int_0^{\int}} \int_0^{\int} u dy, \quad \text{при } y \in \int \quad u \in V_{\infty}. \quad (26)$$

При $Sc \gg 1$ и $\int_D \ll \int$ средняя по толщине диффузионного пограничного слоя скорость потока определяется как средневзвешенная величина по u_{\int} и V_{∞} :

$$u_{\int, D} = \frac{u_{\int} \int V_{\infty} \int_D}{\int_D}. \quad (27)$$

2.4. Учет стефановского потока

Вблизи поверхности испарения наблюдается нарушение равнозначности условий диффузии пара в воздух и воздуха через пар. Молекулы воды, испаряясь, свободно переходят из воды в воздух и диффундируют в поток, а молекулы воздуха, продиффундировав к поверхности воды, не могут проникнуть в воду и скапливаются у поверхности. В итоге у поверхности образуется зона повышенного давления. Релаксируя, оно вызывает поток смеси воздуха с паром в направлении нормали от поверхности испарения. Этот гидродинамический поток называется стефановским [4] и он, добавляясь к молекулярному, увеличивает общий поток пара от поверхности, так что суммарный поток пара j_k по сравнению с молекулярным $j_{МОЛ}$ оказывается равным:

$$j_k = \frac{j_{МОЛ}}{N_C}, \quad (28)$$

где для локальных значений в каждом сечении:

$$N_C = 1 - c_{nw}; \quad (29)$$

для среднего значения вдоль поверхности N_C , $N_C \in 1$:

$$N_C = \frac{c_{nw} - c_{n\infty}}{\ln \frac{1 - c_{n\infty}}{1 - c_{nw}}}, \quad (30)$$

причем для заданных условий расчёта $c_{n\infty} = 0$.

В соответствии с расчётом по п.2.3. подсчитывается молекулярный поток $j = j_{МОЛ}$. Следовательно, для подсчёта фактического потока пара следует учесть стефановский поток

введением поправочного множителя по формуле (28) как для локальных значений для каждого сечения (формула (29)), так и для средних значений (формула (30)).

Аналогично необходимо учесть N_C и N_C^* для фактических значений коэффициента испарения ν и ν^* :

$$\nu^* = \frac{\nu}{N_C}, \quad \nu^* = \frac{\nu^*}{N_C^*}. \quad (31)$$

Скорость стефановского потока:

$$v_{СТ} = \frac{j_\nu (\text{пара})}{X_{ВОЗД}}. \quad (32)$$

3. Задание к работе

3.1. Исходные данные

Строго горизонтальная водная поверхность бесконечной ширины и достаточно большой длины L обтекается свободным потоком воздуха параллельно поверхности со скоростью $V_0 = 20 \text{ м/с}$ в направлении оси x при температуре $T_0 = 338,15 \text{ К}$ ($t_0 = 65^\circ \text{ C}$) и $p_{\text{АТМ}} = p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Точка $x = 0$ является началом гидродинамического пограничного слоя и одновременно началом испарения воды (началом диффузионного пограничного слоя). С учётом теплоты испарения и радиационного нагрева воды от внешнего источника тепла температура её поверхности постоянна и равна:

$$T_W = 303,15 \text{ К} \quad (t_W = 30^\circ \text{ C}) = \text{const}.$$

3.2. Расчётное задание

3.2.1. Рассчитать по гидродинамической теории толщины гидродинамического δ и диффузионного δ_d пограничного слоёв, профили полей скоростей воздуха и концентрации паров воды в пограничном слое, средние значения скорости потока и концентрации в диффузионном пограничном слое, локальные значения β , Sc и j для сечений $x = 0,5 \text{ м}$; $1,0 \text{ м}$ и других (по указанию преподавателя).

Рассчитать для каждого сечения (каждого x) значения поправочного коэффициента N_C и, соответственно ему – значения ν , ν^* , j_ν .

3.2.2. Рассчитать для каждого из выбранных значений x среднее значение β и j для $x = 0 \div x_1$ и суммарное количество испарившейся жидкости по всей длине x_1 .

Рассчитать для каждого сечения (каждого x) значения поправочного коэффициента N_C и, соответственно ему – значения ν , ν^* , M_ν , $v_{СТ}$.

3.3. На основании результатов расчета построить график – эпюру пограничного слоя $\delta, \delta_d(x)$ и на нём же для каждого выбранного сечения x_1 – график $u(y)$ и $c(y)$. Отдельно построить графики – профили полей следующих величин в безразмерных координатах:

$$u(y); \quad \frac{u}{V_0} = f\left(\frac{y}{\delta}\right); \quad d(y), \quad \text{т.е.} \quad \frac{c - c_W}{c_0 - c_W} = f\left(\frac{y}{\delta_d}\right).$$

3.4. Справочные данные

Плотность воздуха $\rho_{\text{ВОЗ}} = 1,293 \left(\frac{p}{p_0}\right) \left(\frac{T_0}{T}\right), \text{ кг/м}^3$.

Кинематическая вязкость воздуха при $t = 65^\circ \text{ C}$ $\nu = 20 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$.

Парциальное давление паров воды в воздухе при $p = p_0$ $p_W = 4240 \text{ Па}$.

Коэффициент диффузии паров воды в воздух при $p = p_0$ и $t = 30^\circ \text{ C}$ $D = 26 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$.

Молярная масса воды $M = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

Универсальная газовая постоянная $K = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$.

4. Порядок выполнения работы

4.1. С помощью настоящего описания и литературы освоить теорию и методику расчёта.

4.2. Подсчитать величины Sc , C_W , Re_{KP} , x_{KP} .

4.3. Для $x \leq x_{KP}$ при $x_1 = 0,5 \text{ м}$ и для $x \geq x_{KP}$ при $x_1 = 1,0 \text{ м}$ и других подсчитать значения u , $u|_y$ и $u|_y|_x$, разбив l на 10 интервалов.

4.4. Выбрав удобный масштаб, построить график u , $u|_y|_x$ и на нём же в поперечных сечениях для каждого $x = x_1$ графики $u|_y$ и $c|_y$. Отдельно построить графики $u|_y|_x$ и $c|_y|_x$.

4.5. Составить таблицу величин u , $u|_y$, j , $j|_y$, M для каждого $x = x_1$.

4.5. Оценить подобие полей u и c .

5. Вопросы для самостоятельной подготовки

5.1. Что характеризуют критерии Re , Sh , Sc , от чего они зависят?

5.2. Что такое гидродинамический и диффузионный пограничные слои? Каким образом они формируются при обтекании плоской поверхности свободным потоком?

5.3. Какие требования должны выполняться для соблюдения аналогий между гидродинамическим переносом импульса и переносом массы? Выполняются ли они в условиях расчётной задачи?

5.4. Каким образом в гидродинамической теории получена формула (3) и когда она справедлива?

5.5. Каким образом получены расчётные формулы для скорости и концентрации в пограничном слое, для коэффициента гидродинамического трения, использованные в расчёте?

5.6. Как определяют среднее значение для u и c по толщине l и l_d ?

5.7. Как и почему именно так рассчитана толщина диффузионного пограничного слоя? В чём смысл и необходимость введения поправок δl в формуле (8)?

5.8. Почему величина C_W может определяться по формуле (22)?

5.9. Почему в расчёте принято $C = const$?

5.10. Согласно расчёту, при росте x количество испаряющейся воды увеличивается. До каких пор это может продолжаться? Если беспредельно, то не абсурден ли этот результат? Как его объяснить? При каких условиях результат мог бы быть иным?

5.11. Расчёт проведён при $c_0 = 0$. Если бы поверхность обдувалась воздухом при заданной температуре T_0 с относительной влажностью, равной 10, 20, 50, 100%, как бы это повлияло на количественные результаты расчёта?

5.12. Оценить в % величину стефановского потока и объяснить его появление.

6. Литература

6.1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1969. – 744 с.

6.2. Гухман А.А. Применение теории подобия к исследованию процессов тепломассопереноса, – М.: “Высшая школа”, 1967. – 304 с.

6.4. Лыков А.В. Тепломассоперенос. Справочник. – М.: Энергия, 1979. – 495 с.